

# EL DODECAEDRO REGULAR y el $n^{\circ} \Phi$

MARTÍN PASTOR, Andrés  
GRANADO CASTRO, Gabriel  
Universidad de Sevilla, España  
EUITA, EUAT, Departamento de Ingeniería Gráfica

[archiamp@us.es](mailto:archiamp@us.es)

## RESUMEN

El origen del Dodecaedro, al igual que el del resto de los poliedros regulares, no se conoce con exactitud. Es común en casi todos los análisis de la historia de los poliedros el convencimiento de que estos sólidos ya se conocían en tiempos prepitagóricos, pero fue Pitágoras y su escuela quienes sistematizaron y estudiaron con rigor estos cuerpos.

En el Renacimiento, destaca la figura de Alberto Durero (1471-1528) que centró su atención en los poliedros, en cuanto le servían de modelos en sus estudios de perspectiva. Representó los poliedros regulares mediante el desarrollo de los mismos sobre un plano. Pero la persona central en el estudio del dodecaedro fue Fra Luca Pacioli (1445-1517). En su obra "*De divina proportione*" estudia especialmente las relaciones entre el Dodecaedro y el Icosaedro y la llamada "divina proporción".

A partir del Renacimiento tanto el estudio de los poliedros como la relación áurea caen en el olvido hasta que en 1850 el alemán Zeysing se interesa en dicha relación, elaborando un estudio sobre la proporción áurea en el cuerpo humano.

Durante el s. XX, son muchos los campos de la Naturaleza y la Ciencia en los que se investiga y se busca la relación que tienen con la geometría del Dodecaedro y la relación áurea. Así destacamos las estructuras de diversos elementos de cubrición, estructuras de animales marinos, compuestos moleculares, cadena de ADN, etc...

Se expondrán algunas construcciones en el campo de la arquitectura e ingeniería basadas en el dodecaedro, como son algunas cúpulas geodesicas.

**Palabras clave:** Geometría, poliedros, regulares.

**Grupo temático:** Geometría

---

## 1. INTRODUCCIÓN

El tema que nos ocupa se destina al estudio de uno de los cinco poliedros regulares convexos que existen, el denominado Dodecaedro.

A continuación analizaremos la geometría del Dodecaedro Regular, destacando sus características principales, los elementos que lo componen, las relaciones métricas entre ellos, etc..., convencidos de que sin este conocimiento no podremos abordar su representación en cualquiera de los sistemas de representación técnicos existentes.

Debido a que el estudio de este poliedro vamos a realizarlo basándonos en el número “ $\phi$ ”<sup>1</sup> o “divina proporción”, que define y da sentido a su geometría, es obligado hacer referencia a Fra Luca Pacioli.

Fra Luca Pacioli fue un insigne matemático y geómetra del Renacimiento, el cual defendió la aplicación de la Geometría a la producción artística de su tiempo. Fra Luca dedicó gran parte de su vida a la docencia, enseñando matemáticas en las principales universidades y cortes italianas de la época.

Entre sus obras más importantes destacamos “*De divina proportione*”, terminada en 1497 e impresa en 1509. En dicha obra Pacioli expone los fundamentos matemáticos de la que denomina “divina proporción”<sup>2</sup>, considerándola principio universal y objetivo de belleza en el Universo, debiendo ser punto de referencia en las manifestaciones artísticas. Destacar en esta obra los hermosísimos dibujos de poliedros realizados por su amigo Leonardo da Vinci.

Esta proporción se pone de manifiesto en los poliedros regulares y especialmente en el Dodecaedro, donde adquiere un papel decisivo en la definición de su geometría<sup>3</sup>.

Prueba de la especial relación existente entre Fra Luca Pacioli y el Dodecaedro es el cuadro de Jacopo de Barbari (Fig.1) en el que aparece Pacioli acompañado de un joven (el cual podría ser Guidubaldo de Montefeltro, del que fue preceptor, si bien existen algunas tesis que lo identifican con Durero<sup>4</sup>), explicando uno de los trazados geométricos de los Elementos de Euclides (Libro XIV.8 de la edición de 1482<sup>5</sup>), observándose en la parte inferior derecha un Dodecaedro de mármol blanco.

El cuadro sintetiza en gran parte el enfoque que en la presente lección se le da al estudio de la geometría del Dodecaedro.

---

<sup>1</sup> La asignación de la letra griega  $\phi$  se debe a Mark Barr y Schooling, que la emplearon por primera vez en los anexos matemáticos del libro de Sir Theodore Cook titulado “*The Curves of Life*” (Las curvas de la vida).

<sup>2</sup> Pacioli le atribuye la denominación de “divina”, justificando dicha asignación en la correspondencia que encuentra entre esta proporción y la divinidad misma.

<sup>3</sup> La importancia de la divina proporción en la definición del Dodecaedro es puesta de manifiesto por Fra Luca Pacioli en su “*De Divina Proportione*” en el capítulo V con las siguientes palabras: “...nuestra santa proporción confiere el ser formal, según el antiguo Platón en su *Timeo*, al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo llamado dodecaedro o, dicho de otro modo, cuerpo de doce pentágonos, **el cual, como más abajo se demostrará, no puede formarse sin nuestra proporción**”.

<sup>4</sup> “The Portrait of Fra Luca Pacioli”: Mackinnon, N. The Mathematical Gazette. Volume 77. Number 479. Julio 1993. PP. 139-143.

<sup>5</sup> “The Portrait of Fra Luca Pacioli”: Mackinnon, N. The Mathematical Gazette. Volume 77. Number 479. Julio 1993. PP. 138-139.

---



*Fig.1.- Jacopo de Barbari<sup>6</sup>. 1495. Museo di Capodimonte. Nápoles.*

---

<sup>6</sup> Existen dudas acerca de la autoría de este cuadro, si bien la opinión más generalizada lo atribuye a Jacopo de Barbari.

---

## 2. DESARROLLO

### ANTECEDENTES HISTÓRICOS

El origen del Dodecaedro, al igual que el del resto de los poliedros regulares, no se conoce con exactitud.

Es común en casi todos los análisis de la historia de los poliedros el convencimiento de que estos sólidos ya se conocían en tiempos prepitagóricos, pero fue Pitágoras y su escuela quienes sistematizaron y estudiaron con rigor estos cuerpos.

Concretamente la construcción del Dodecaedro es atribuida a los pitagóricos, a quienes también se le atribuye la construcción del Hexaedro.

El resto de los poliedros regulares probablemente fueron desarrollados por Teeteto (415 aC- 369 aC), amigo y alumno de Platón.

No obstante, aunque es probable que Pitágoras fuera el primero en estudiar la geometría del Dodecaedro (no hay que olvidar que para los pitagóricos el pentágono constituía una figura sagrada), éste seguramente lo conoció en sus múltiples viajes a Egipto.

Existen algunas referencias acerca de que fueron los pitagóricos los primeros que estudiaron con profundidad el Dodecaedro. Así Hipasos de Metapunto, alumno de Pitágoras, fue el primero en inscribir un Dodecaedro Regular en una esfera. Posteriormente fue excomulgado de la comunidad pitagórica por divulgar dicho secreto. Igualmente Hipócrates de Chios fue expulsado por la escuela pitagórica por divulgar secretos geométricos entre los que se encontraba el llamado pentagrama de Hipócrates.

Debido al secretismo que rodeaba los estudios de la comunidad pitagórica, el primero en formular y hacer público una teoría general de los poliedros fue Teeteto, exponiendo la construcción geométrica de los cinco poliedros regulares y demostrando que no pueden existir otros.

Platón, del que heredaron el apelativo de cuerpos platónicos, los presenta en su obra “El Timeo”, considerándolos como elementos últimos de la materia. En dicha obra Platón expone la existencia de una quinta combinación, la cual ha sido generalmente interpretada como una referencia al Dodecaedro, al que no lo asocia a ningún elemento de la materia, sino que le asigna la representación del Todo, la Quintaesencia.



Fig.2.- Cuerpos platónicos

Posteriormente Euclides en el libro XIII de los Elementos presenta los cinco poliedros regulares y construye un Dodecaedro inscrito en una esfera (Proposición 17) partiendo del Hexaedro inscrito en dicho Dodecaedro. Luego remata el libro con la demostración de la existencia únicamente de cinco poliedros regulares.

No está claro de qué fuentes se sirvió Euclides para escribir el libro XIII<sup>7</sup>, si bien parece que no fue de las referencias cosmológicas de Platón y sí de un tratado escrito por Aristeo dedicado a un estudio comparado de los cinco Poliedros Regulares.

---

<sup>7</sup> Existen algunos autores que incluso ponen en duda que Euclides lo escribiera y que lo que sí hizo fue dejarle un sitio en sus Elementos.

---

Para encontrar más referencias concretas del estudio del Dodecaedro y de los poliedros regulares en general tenemos que irnos al Renacimiento.

Son muchos los artistas y personalidades del conocimiento que incorporan estos estudios a sus tratados de Geometría.

Así destacamos a Alberto Durero (1471-1528) que centró su atención en los poliedros, en cuanto le servían de modelos en sus estudios de perspectiva. Representó los poliedros regulares mediante el desarrollo de los mismos sobre un plano.

Tal como hemos comentado en la introducción existe una persona que en el estudio del Dodecaedro destaca sobre los demás y es Fra Luca Pacioli (1445-1517). En su obra “*De divina proportione*” estudia especialmente las relaciones entre el Dodecaedro y el Icosaedro y la llamada “divina proporción”.

Esta proporción ya era conocida en la Antigüedad y es presentada por Euclides en el libro VI de los Elementos (proposición 30) al dividir un segmento en media y extrema razón.

Pacioli es quién encuentra en esta relación el sentido a la geometría del pentágono, el Dodecaedro y el Icosaedro.

Casi un siglo más tarde el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) encuentra en los poliedros regulares una explicación a las órbitas de los planetas alrededor del Sol, ubicando unos dentro de otros. En esta estructura del universo presentada en su obra “*Mysterium cosmographicum*” ubica al Dodecaedro entre las órbitas de la Tierra y Marte. Además sistematiza y desarrolla todo lo que se conocía en su época de poliedros.

Respecto a la divina proporción o sección áurea<sup>8</sup>, Kepler fue el primero en mencionar su interés en Botánica<sup>9</sup>.

A partir del Renacimiento tanto el estudio de los poliedros como la relación áurea caen en el olvido hasta que en 1850 el alemán Zeysing se interesa en dicha relación, elaborando un estudio sobre la proporción áurea en el cuerpo humano.

Durante el s. XX, son muchos los campos de la Naturaleza y la Ciencia en los que se investiga y se busca la relación que tienen con la geometría del Dodecaedro y la relación áurea. Así destacamos las estructuras de diversos elementos de cubrición, estructuras de animales marinos, compuestos moleculares, cadena de ADN, etc...

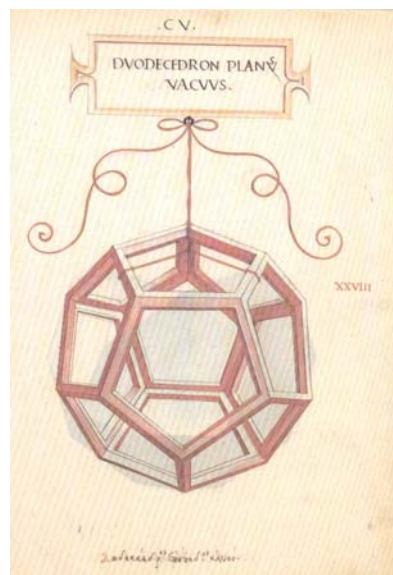


Fig.3.- Dodecaedro regular dibujado por Leonardo da Vinci en “*De Divina Proportione*”

## DEFINICIÓN

El Dodecaedro es un poliedro regular convexo que consta de doce caras, las cuales son pentágonos regulares.

Analizando el Dodecaedro Regular del cuadro de Jacopo de Barbari (Fig.4) se observan una serie de aspectos que en un primer contacto y sin un estudio riguroso nos pueden ayudar a comprender mejor la geometría de este poliedro y familiarizarnos con él.

---

<sup>8</sup> No se conoce el origen exacto del término “sección áurea”, si bien se sitúa en Alemania en la primera mitad del s. XIX. “Luca Pacioli. *La divina proporción*”. Traducción de Juan Calatrava. Pág. 20. Nota 54. En otras fuentes es atribuido dicho término a Leonardo da Vinci. “*La divina proporción. Las formas geométricas.*”. Carmen Bonell. Pág. 17.

<sup>9</sup> Kepler consideró a la relación áurea como una de las dos joyas de la Geometría junto con el Teorema de Pitágoras.

---

Se observa que definida una cara, por ejemplo la apoyada en el libro, al tratarse de un pentágono regular la podemos inscribir en una circunferencia. Existe otra cara paralela a la anterior que también la podemos inscribir en una circunferencia.

## CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES

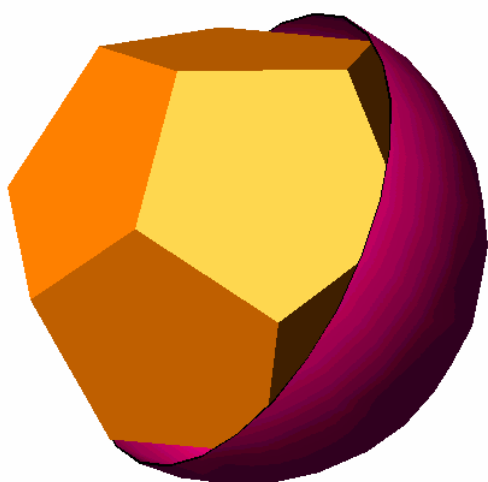
Al igual que en el resto de los poliedros regulares, en la geometría del Dodecaedro destaca la simetría. Se trata de una simetría central en el que el centro de simetría es denominado **centro geométrico del poliedro o centro de gravedad**.

De esta manera todo vértice posee otro vértice simétrico al que denominamos **vértice opuesto**. De igual forma toda arista posee otra arista simétrica que se denomina **arista opuesta**, siendo ambas paralelas. También toda cara posee otra cara simétrica, denominada **cara opuesta**, siendo ambas paralelas y giradas una respecto a la otra  $180^\circ$  debido a esta simetría central.

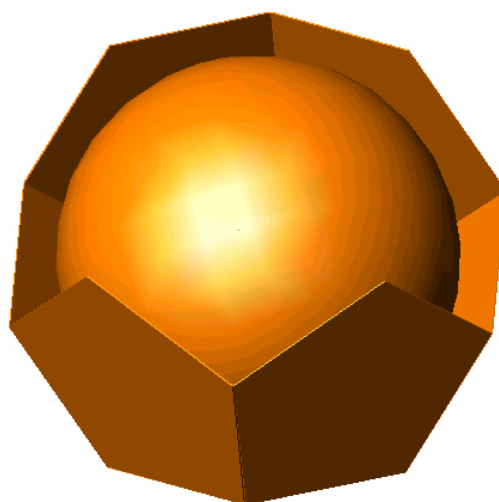
El Dodecaedro posee 15 planos de simetría que pasan por pares de aristas opuestas y cortan por el punto medio a otro par de aristas opuestas.

Esta simetría central existente produce una equidistancia de todos los elementos del Dodecaedro al centro de simetría, denominado centro geométrico del poliedro. Esta característica permite la definición, al igual que en el resto de poliedros regulares, de las **esferas circunscrita, inscrita y tangente a las aristas**, las cuales tienen su centro en el centro geométrico o de gravedad del poliedro.

La esfera circunscrita (Fig. 6a) contiene a todos los vértices del Dodecaedro y pone de manifiesto la equidistancia existente entre todos los vértices del Dodecaedro y el centro del mismo. La esfera inscrita (Fig. 6b) es tangente a todas las caras del Dodecaedro y contiene a los centros de las mismas. La esfera inscrita es prueba de la equidistancia existente entre las caras del Dodecaedro y el centro del mismo. La esfera tangente a las aristas (Fig. 6c) contiene a los puntos medios de todas las aristas y es prueba de la equidistancia existente entre las aristas del Dodecaedro y el centro del mismo.



*Fig.6.a.Esfera circunscrita al Dodecaedro*



*Fig.6.b.Esfera inscrita al Dodecaedro*

## *NÚMERO $\varphi$ Y LA SECCIÓN PRINCIPAL*

La sección principal es la sección característica más importante dado que en ella se identifican las relaciones métricas más significativas de un poliedro regular.

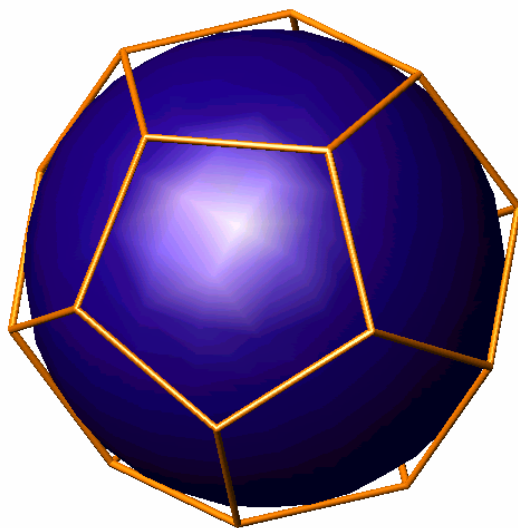
En el Dodecaedro la sección principal es producida por un plano que contiene a dos aristas opuestas, es decir, simétricas y por tanto paralelas. Dicho plano contiene al centro geométrico y es de simetría. Al existir 30 aristas en el Dodecaedro Regular existen 15 planos de simetría y otras tantas secciones principales.

La sección principal del Dodecaedro es un hexágono irregular en el que dos de sus lados paralelos son iguales a la arista del Dodecaedro y el resto de sus lados, paralelos dos a dos, tienen como valor la altura de cara (Fig. 14).

La construcción de la sección principal puede abordarse de diferentes formas. Por ejemplo analizando las características geométricas de dicho polígono y construirlo sin relacionarlo con el poliedro al que pertenece.

No obstante, consideramos fundamental abordar el análisis de la sección principal desde la base de las relaciones métricas en el Dodecaedro Regular: el número  $\varphi$  o relación áurea.

Para ello recordaremos los fundamentos y características de la denominada por Pacioli “divina proporción”.



*Fig.6.c. Esfera tangente a las aristas del Dodecaedro*

## SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

La sección o división áurea de segmento es aquella en la que dado un segmento AB un punto C lo divide de tal forma que su división mayor AC es media proporcional entre la longitud total del segmento AB y su división menor CB.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Euclides en la definición nº3 del libro VI de los Elementos establece que “una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor”. Por tanto, en la división áurea de un segmento a la parte de mayor longitud la denomina **media razón** y a la parte de menor longitud **extrema razón**.

A la relación áurea se le asigna una letra griega ( $\phi$ ) y su valor es  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , un número irracional cuyo valor es 1,618033989.....

Este número se obtiene aplicando las definiciones anteriores a un segmento en el que una de sus divisiones sea la unidad.

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \phi \rightarrow x^2 = x \cdot y + y^2$$

$$y = 1 \rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,618034$$

En la construcción gráfica de la relación áurea aparece una figura básica: el triángulo rectángulo cuyo cateto mayor es el doble del cateto menor.

En un triángulo rectángulo cuyo cateto menor es la unidad y el cateto mayor es dos unidades, la hipotenusa tiene un valor de  $\sqrt{5}$  unidades. De manera que tenemos todos los términos del quebrado cuyo valor es el número  $\phi$ . Siendo válidos todos los triángulos semejantes al anterior.

$$\phi = \frac{\text{cateto menor} + \text{hipotenusa}}{\text{cateto mayor}} = \frac{a + \sqrt{5}a}{2a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

---

Euclides en el libro VI de los Elementos en la proposición nº30 divide un segmento en media y extrema razón. El procedimiento utilizado es una aplicación directa de la proposición nº29 del mismo libro (*Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual a una figura dada y que exceda en una figura paralelogramo semejante a una dada*), en el caso particular de que el exceso del paralelogramo que se aplica sea un cuadrado. Este procedimiento se basa igualmente en el triángulo rectángulo anteriormente descrito.

En la presente lección proponemos unos trazados que permiten identificar todos los elementos de una relación áurea, partiendo de un segmento AB que puede ser media, extrema razón o segmento total.

## **EL NÚMERO $\phi$ EN EL PENTÁGONO REGULAR Y EN EL DODECAEDRO REGULAR**

Como hemos comentado en la introducción el número  $\phi$  adquiere un papel principal en la geometría del pentágono regular<sup>10</sup> y del Dodecaedro Regular.

En el pentágono regular la diagonal y el lado guardan una relación áurea en la que el lado es la media razón de la diagonal. Según lo expuesto en el apartado anterior si el lado del pentágono regular es el segmento AB, entonces la diagonal sería el segmento AD

En el decágono regular la relación áurea se establece entre el radio de la circunferencia circunscrita y el lado del decágono, de tal forma que el lado es la media razón del radio de la circunferencia circunscrita. En esta relación se fundamentan las construcciones gráficas utilizadas en la obtención de un pentágono regular inscrito en una circunferencia dada.

Además la altura del pentágono regular es dividida en media y extrema razón por la diagonal a la que es perpendicular.

Estos son algunos ejemplos de la presencia del número  $\Phi$  en el pentágono. No obstante a poco que analicemos a fondo su geometría, las relaciones áureas que podamos identificar pueden ser innumerables.

### **Dodecaedro Regular**

En el Dodecaedro Regular junto a la relación áurea existente entre la diagonal de cara (dc) y la arista (a), existe otra relación áurea entre la distancia entre aristas opuestas (d) y la diagonal de cara (dc). Recordemos que una de las secciones características del Dodecaedro producida por un plano paralelo a una cara es un pentágono regular de arista la diagonal de cara y de diagonal la distancia entre aristas opuestas, permitiendo que se cumpla la relación anterior.

De esta manera, estos tres elementos conforman una relación áurea en la que la arista del Dodecaedro es la extrema razón, la diagonal de cara es media razón y la distancia entre aristas opuestas es el segmento total.

---

<sup>10</sup> Pacioli en el capítulo XXII de su tratado "*De divine proportione*", deja claro la ineludible relación entre el pentágono regular y la divina proporción, con las siguientes palabras: "...no es poco de admirar el hecho de que sin su ayuda nunca se pueda formar el pentágono, es decir, la figura de cinco lados iguales...".

---

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi$$

$$\frac{d}{dc} = \frac{dc}{a} = \Phi$$

## LA SECCIÓN PRINCIPAL

La sección principal del Dodecaedro Regular es un hexágono irregular en el que los dos lados paralelos menores son iguales a la arista y el resto de lados, paralelos dos a dos, son iguales a la altura de cara.

La sección principal puede inscribirse en un cuadrado cuyo lado es la distancia entre aristas opuestas (Fig. 20a), perteneciendo dicho lado a una de las relaciones áureas del Dodecaedro Regular.

La sección principal queda definida por dos elementos: la arista y la distancia entre aristas opuestas. No obstante al pertenecer ambos a una de las relaciones áureas del Dodecaedro Regular, conociendo sólo cualquiera de ellos puede construirse la sección principal.

Conocidos estos dos elementos (arista y distancia entre aristas opuestas) que conforman una relación áurea, se construye un cuadrado de lado la distancia entre aristas opuestas (segmento total). Se determina los puntos medios de dos de sus lados paralelos (M y N), siendo estos puntos vértices de la sección principal y puntos medios de aristas del Dodecaedro. En los otros lados del cuadrado se traza un segmento cuyo valor es la arista del Dodecaedro coincidiendo sus puntos medios con los puntos medios del lado del cuadrado. Estos dos segmentos son lados de la sección principal y aristas del Dodecaedro.

Una vez construida la sección principal identificaremos en ella las distintas relaciones métricas del Dodecaedro Regular.

**1M**  $\equiv$  **M20**  $\equiv$  **19N**  $\equiv$  **N2** Altura de cara

**c**  $\equiv$  **c'** Centro de cara

**P Q** Diagonal de cara

**c c'** Distancia entre caras opuestas (Diámetro de la esfera inscrita)

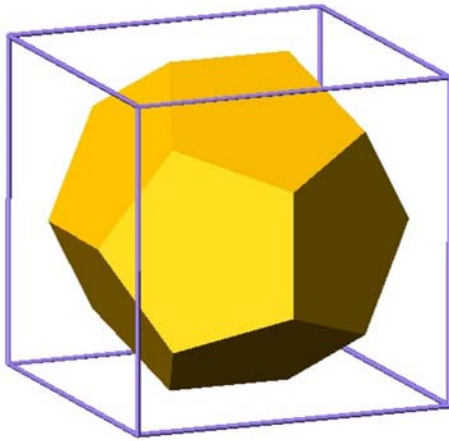
**O** Centro geométrico

**MN** Distancia entre aristas opuestas (Diámetro de la esfera tangente a las aristas)

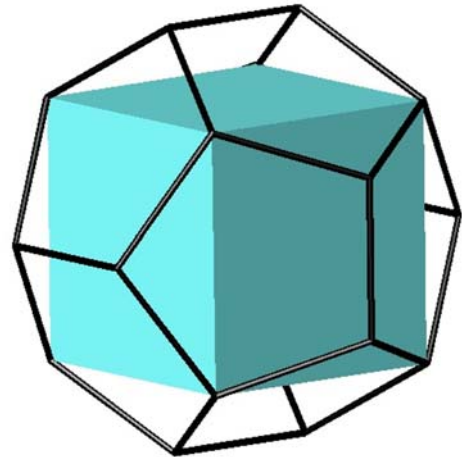
**2-20**  $\equiv$  **1-19** Diagonal (Diámetro de la esfera circunscrita)

## POLIEDRO INSCRITO, CIRCUNSCRITO Y CONJUGADO

Tanto el poliedro inscrito como el circunscrito al Dodecaedro Regular es un **Hexaedro Regular** (Fig. 23 y Fig. 24).



*Fig. 23.- Hexaedro circunscrito al Dodecaedro*



*Fig. 24.- Hexaedro inscrito al Dodecaedro*

El poliedro circunscrito al Dodecaedro es un Hexaedro Regular cuya arista tiene una longitud igual a la distancia entre aristas opuestas del Dodecaedro, mientras que el poliedro inscrito es un Hexaedro Regular cuya arista tiene una longitud igual a la diagonal de cara del Dodecaedro. Una vez más aparece el número  $\phi$  dado que las aristas de dichos hexaedros guardan una relación áurea.

$$\frac{L}{l} = \frac{d}{dc} = \Phi$$
 siendo “L” la arista del Hexaedro circunscrito y “l” la arista del Hexaedro inscrito.

El Hexaedro circunscrito no tiene en común ningún vértice con el Dodecaedro, si bien cada una de sus caras contiene a una arista del mismo.

El Hexaedro inscrito comparte todos sus vértices con el Dodecaedro. Esta característica nos recuerda la construcción del Dodecaedro Regular realizada por Euclides en el libro XIII, proposición 17, en la que utiliza el Hexaedro inscrito al Dodecaedro para construir este último.

En la sección principal del Dodecaedro Regular (Fig. 25) se identifica con claridad las relaciones métricas entre el Dodecaedro y los poliedros inscrito y circunscrito. La sección principal puede inscribirse en un cuadrado cuyo lado es la distancia entre aristas opuestas del Dodecaedro (lado del Hexaedro Regular circunscrito). Igualmente podemos inscribir en la sección principal un cuadrado cuyo lado es la diagonal de cara del Dodecaedro (lado del Hexaedro inscrito).

Además del poliedro inscrito y circunscrito existe el denominado poliedro conjugado.

Se denomina poliedro conjugado de un poliedro dado, aquel en el que cada vértice del primero se corresponde con una cara del segundo, siendo cada cara perpendicular a la recta que une el vértice del primero con su centro geométrico.

Los poliedros conjugados de los poliedros regulares son también poliedros regulares.

El poliedro conjugado del Dodecaedro Regular es el **Icosaedro Regular**, el cual posee tantos vértices como caras tiene el Dodecaedro (12) y tantas caras como vértices tiene el Dodecaedro (20). El Icosaedro Regular posee, por tanto, veinte caras que son triángulos equiláteros (Fig. 26).

	DODECAEDRO REGULAR	ICOSAEDRO REGULAR
Caras	12	20
Aristas	30	30
Vértices	20	12

El Icosaedro Regular es un poliedro donde, al igual que en el Dodecaedro Regular, el número  $\phi$  adquiere un papel fundamental en la definición de su geometría.

---

## CONCLUSIONES.

### EL DODECAEDRO. ARQUITECTURA, INGENIERÍA Y CIENCIA

Exponemos a continuación una muestra de la presencia del Dodecaedro Regular en la Arquitectura y en diversos campos de la Ciencia.

#### *ARQUITECTURA E INGENIERÍA*

La principal aplicación del Dodecaedro en Arquitectura la encontramos en la generación de las llamadas **cúpulas geodésicas**.

Las cúpulas geodésicas permiten cubrir grandes superficies a través de estructuras estables y poco pesadas.

Una cúpula geodésica no es más que una triangulación de la superficie esférica.

El creador de este tipo de estructura fue Richard Buckminster Fuller (1895-1983), el cual presentó su primer proyecto en 1951.

Su obra más famosa, la esfera del pabellón USA en la Exposición Universal de Montreal de 1967 (Fig. 43), demostró la imposibilidad de cubrir barrios enteros con cúpulas como pretendía Fuller, ya que su envoltura de plástico ardió durante unas reparaciones en 1976.



*Fig.43.- Pabellón USA.  
Exposición Universal de  
Montreal 1976*

Una forma de generar una cúpula geodésica es a partir del Dodecaedro Regular. Si unimos el centro geométrico del Dodecaedro con el centro de una cara y prolongamos dicha recta hasta cortar a la esfera circunscrita, obtenemos un vértice que al unirlo con los cinco vértices de dicha cara, da lugar a cinco nuevas caras triángulos isósceles. Realizando esta operación con las doce caras del Dodecaedro obtenemos una primera transformación del poliedro original (Fig. 44), la cual nos recuerda al *Duodecedron Elevatus* de Leonardo en *“De Divine Proportione”*. Repitiendo este proceso con los puntos medios de las nuevas aristas obtendríamos una superficie geodésica de 240 caras.

Las cúpulas geodésicas también pueden obtenerse a partir de un Icosaedro Regular.

En España existe una cúpula geodésica en el Museo de Salvador Dalí en Figueres (Girona), siendo el propio pintor quién decidió su colocación atraído por las estructuras de Fuller (Fig. 45).

Además de las cúpulas geodésicas existen algunos ejemplos de la presencia del Dodecaedro en estructuras de edificios. En este sentido destacamos el proyecto de un salón de exposición de doble membrana a baja presión de Gernot Minke.

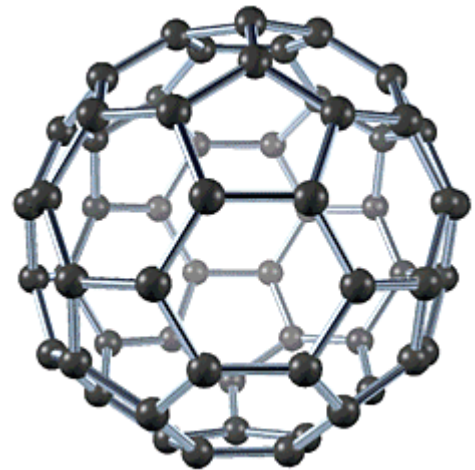
En el paisaje arquitectónico existen igualmente algunos ejemplos de la presencia del Dodecaedro Regular, como el que existe en el Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja en Madrid (Fig. 46).



*Fig. 45.- Museo Salvador  
Dalí. Figueres(Girona)*



*Fig. 46.- Dodecaedro en el Instituto Eduardo Torroja*



*Fig. 47.- Estructura atómica del fullereno*

## **CIENCIA**

Es el campo de la virología donde aparecen los poliedros regulares como mayor protagonismo.

El ácido nucleico que contiene el material genético está protegido por una capa proteica que se denomina cápside, la cual adquiere en la mayoría de los casos la estructura poliédrica de Fuller anteriormente analizada. Se trata de la tercera forma alotrópica del carbono y es una molécula compuesta por 60 átomos de carbono, a la que se denomina “fullereno” (Fig. 47). Además se trata de un poliedro arquimediano denominado Troncoicosaedro.

Igualmente destacamos que la estructura del modelo de la cadena de ADN está formada por una serie de dodecaedros superpuestos en espiral.

En la naturaleza también aparecen estructuras poliédricas como cristales de diversas sustancias. Así el cubo aparece en las estructuras cristalinas de la sal común, el tetraedro en las de sodio sulfantimoniato, el octaedro en las de alumbre del cromo y el dodecaedro (no regular) en las de pirita. En este último a dicha estructura dodecaedral con la que cristaliza en algunas ocasiones la pirita se denomina con el nombre de **piritoedro**.

Por último destacar que existen muchos ejemplos de existencia del pentágono en la naturaleza. Son diversas las plantas, frutos, organismos marinos, etc... en los que el pentágono juega un papel importante en el crecimiento de su estructura y forma.



*Fig. 48.- Pirita con estructura dodecaedral. “Piritoedro”.*

## BIBLIOGRAFÍA

BERMEJO HERRERO, M.: “Geometría Descriptiva Aplicada I”. Publicaciones de la Universidad de Sevilla. 1978. Capítulo 8º

BONELL, CARMEN: “La divina proporción. Las formas geométricas”. Ediciones UPC. 1999

BONET MINGUET, E.: “Sistemas de Representación Espacial”. Quiles Artes Gráficas. 1986. Capítulo V

DÍAZ MARTÍNEZ, E.: “Poliedros semirregulares. 1ª parte. Poliedros equiángulos”. Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica. Universidad de Sevilla. 1989

DÍAZ MARTÍNEZ, E.: “Poliedros semirregulares. 2ª parte. Poliedros equifaciales”. Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica. Universidad de Sevilla. 1989

DOMÉNECH ROMÁ, J.: “Poliedro Regulares. Geometría Descriptiva”. Universidad de Alicante. 1994

DÜRER, A.: “Géométrie”. Presentación, traducción del alemán y notas por Jeanne Peiffer. Seuil. París, 1995

EUCLIDES: “Los Elementos”. Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos. 2000

FERRER MUÑOZ, J. L.: “Superficies Poliédricas”. Editorial Paraninfo. 2000

GHYKA, MATILA C.: “Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes”. Editorial Poseidón. 1983

GHYKA, MATILA C.: “El número de oro. I los ritmos-II los ritos”. Editorial Poseidón. 1992

GONZÁLEZ GARCÍA, V., LÓPEZ POZA, R. y NIETO OÑATE, M.: “Sistemas de Representación. Sistema Diédrico”. Tomo I. Edificiones Texgraf. 1983. Capítulo 15

GONZÁLEZ MONSALVE, M. y PALENCIA CORTÉS, J.: “Dibujo Técnico II. Geometría Descriptiva”. Los Autores. 1996

GONZÁLEZ MONSALVE, M. y PALENCIA CORTÉS, J.: “Dibujo Técnico II. Geometría Descriptiva”. Los Autores. 1996

GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.: “Pitágoras. El filósofo del número”. La matemática en sus personajes 9. Nivola. 2001

IZQUIERDO ASENSI, F.: “Geometría Descriptiva Superior y Aplicada”. Editorial Paraninfo. 1996. Capítulo 11

JAMNITZER, WENTZEL: “Perspectiva corporum regularium”. Prefacio de Albert Flocon. Traducción de Elena del Amo. Ediciones Siruela. 1993

MACKINNON, N.: “The Portrait of Fra Luca Pacioli”. The Mathematical Gazette. Volumen 77. Número 479, pp. 130-219. Julio 1993

---

MARTÍN CASALDERREY, F.: “Cardano y Tartaglia. Las Matemáticas en el Renacimiento italiano”. La matemática en sus personajes 4. Nivola. 2000

MONTÚ, ALDO: “La scoperta del pentágono”. Versión castellana de Mar Núñez. Ediciones Gustavo Gili, SA de CV. 1999

PACIOLI, LUCA: “La divina proporción”. Traducción de Juan Calatrava. Introducción de Antonio M. González. Ediciones Akal S.A. 1987

PALANCAR PENELLA, M.: “Geometría Superior”. El Autor. 1983. Parte 4: Poliedros Regulares Convexos

PÉREZ SÁEZ, J.: “Geometría Descriptiva y sus aplicaciones”. El Autor. 1968. Capítulos II y VIII

PLATÓN: “Ión, Timeo, Critias”. Clásicos de Grecia y Roma. Traducción, introducción y notas de José María Pérez Martel. Alianza Editorial. Madrid 2004

PUIG ADAM, P.: “Curso de Geometría Métrica”. Edición Biblioteca Matemática, S.L. 1972

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F.: “Geometría Descriptiva”. Tomo I. Editorial Donostiarra. 1991. Tema 9

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. y ÁLCAREZ BENGEOA, V.: “Geometría Descriptiva”. Tomo III. Sistema Axonométrico. Editorial Marfil. 1987. Tema 9

RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. y REVILLA BLANCO, A.: “Geometría Descriptiva”. Tomo IV. Sistema de Perspectiva Caballera. Editorial Donostiarra. 1982. Capítulo VIII

RUÍZ DE LA ROSA, J.A.: “Libro de Arquitectura. Hernán Ruiz II. El Libro de Geometría”. Guadalquivir S.L. Ediciones de Sevilla. Fundación Sevillana de Electricidad. 1998

STEPHENSON, P.: “Plato’s fourth solid and the pyritohedron”. The Mathematical Gazette. Volumen 77. Número 479, pp. 220-226. Julio 1993.

TAIBO FERNÁNDEZ, A.: “Geometría Descriptiva y sus aplicaciones”. Tomo II. Editorial Tébar Flores. 1983. Capítulo III

VILLORIA SAN MIGUEL, V.: “Fundamentos geométricos”. Editorial Dossat. 1992

---



